

**А.А. Локшин**

**СВОБОДНАЯ ВОЛЯ  
И МАТЕМАТИКА,  
или  
ошибка Хокинга**

## Аннотация

Локшин А.А. Свободная воля и математика, или Ошибка Хокинга.  
Изд.2. Москва, 2012

Книжка в основном посвящена вопросу о роли свободного выбора при определении таких важнейших математических понятий как переменная, натуральное число, бесконечность и др. Показано, что без операции свободного выбора не может существовать как неформальная, так и формальная математика. Фактически неизвестны какие-либо другие работы на эту тему, тесно связанную к тому же с поставленной Аланом Тьюрингом проблемой: отличить человека от робота в процессе (заочного) диалога. Наиболее важный результат, представленный в книжке – это вывод: отрицать существование свободной воли и при этом пользоваться математикой невозможно, не нарушая законов логики (парадокс, не замеченный Стивеном Хокингом в книге "Великий Замысел"). Во втором издании исправлены замеченные неточности и добавлен новый материал.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

После того как моя статья «Свобода воли и математика» (Знание – Сила, 2010, №3) была дважды украдена в Интернете (статью перепечатали, «забыв» указать ее автора), я решил, что данная тема представляет определенный интерес и имеет смысл ее развить.

Вот так и возникла эта работа, в основном, посвященная вопросу о роли, которую играет свобода воли в формировании важнейших математических понятий. По какому-то странному недоразумению этому вопросу не было уделено в литературе должного внимания. Фактически, мне неизвестны чьи-либо еще работы на эту тему, тесно связанную, как будет видно, с поставленной Аланом Тьюрингом проблемой: отличить человека от робота в процессе (заочного) диалога.

Вопрос о наличии или, наоборот, отсутствии у человека свободы воли уходит корнями в глубокую древность. Этой темой интересовалось множество философов и ученых (от Эпикура до Стивена Хокинга). Тем не менее, ясность в этом вопросе ни в коей мере не была достигнута. Надеюсь, что собранные мною аргументы будут, хотя бы отчасти, способствовать его прояснению. Наиболее важный результат, представленный в данной работе – это вывод: отрицать существование свободной воли и при этом пользоваться математикой невозможно, не нарушая законов логики (парадокс, не замеченный Стивеном Хокингом).

Во втором издании исправлены некоторые неточности и добавлен новый раздел о связи произвольного выбора со свободой воли.

*Автор,  
Москва, 2012*

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Оператор свободного выбора.....
2. Свободный выбор и тест Тьюринга.....
3. О понятии «переменная величина» .....
4. Свобода воли и пространственные представления .....
5. Основания математики (логическая драма в двух действиях)....
6. Немного лингвистики: “arbitrary element” и “free will” .....
7. Четыре истории про зверей .....
8. Что является маркером для человеческого «Я»? .....
9. Можно ли обойтись без свободного выбора в естественных науках?.....
10. Музыка как сверхструктура.....
11. Что такое доказательство? .....

# 1. ОПЕРАТОР СВОБОДНОГО ВЫБОРА

(см. Знание-Сила, №3, 2010)

В последнее время вопросом о наличии свободы воли у живых существ заинтересовались, наконец, не только философы, но и экспериментаторы. Вот ссылки на две интересные серии опытов, проведенных, соответственно, над мухами (см.[1], [2]) и над людьми (см.[3]).

Впрочем, результаты этих опытов не дают убедительного ответа на поставленный вопрос. На мой взгляд, одна из причин этого – в том, что с самим определением понятия «свободная воля» имеются некоторые проблемы. Но об этом я подробнее скажу ниже.

Стивен Хокинг не так давно писал [4]:

*«Конечно, можно утверждать, что свободная воля все равно иллюзия. Если действительно существует всеобъемлющая физическая теория, которая управляет всем сущим, то следует полагать, что она детерминирует и наши действия. Однако она делает это так, что ее следствия невозможно предвычислить для такого сложного организма, как человеческое существо, и, кроме того, она включает определенный элемент случайности, соответствующий квантово-механическим эффектам. Это позволяет говорить, что наши декларации о свободной воле человека проистекают из невозможности предсказать, что он будет делать».*

Хокингу принадлежит также соображение о том, что возможность путешествия во времени и наличие свободы воли противоречат друг другу.

А вот что пишет по поводу свободы воли Б.Б. Кадомцев [5]:

*«Под свободой воли мы будем понимать здесь свободу действий, или свободный выбор между двумя или несколькими альтернативами. Принято считать, что человек безусловно обладает свободой воли, будучи свободным в своих поступках. Разумеется, человеку часто приходится совершать вынужденные поступки под давлением внешних обстоятельств, однако и в этом случае последний выбор остается за ним.*

*Не факт, что абсолютно все примут данное утверждение за истину. Следуя, например, Шопенгауэру, можно было бы утверждать, что человек анализирует только хотения, а самый последний момент принятия решения может выпасть из-под его контроля. <...>*

*Однако, мы будем оставаться на более наивной точке зрения, полагая, что человек свободен в своих поступках и потому ответствен за них. Но принимая свободу действий для человека, мы не должны обижать и животный мир <...>. Но никак нельзя принять допущение, что свобода действий появляется скачком на некотором уровне развития: даже у самых примитивных представителей животного мира сохраняется свобода действий. Более того, очень трудно представить рубеж появления свободы воли на границе между неодушевленным миром и жизнью».*

Невозможно не согласиться с тем, что по крайней мере люди обладают свободой воли и *поэтому* должны отвечать за свои поступки. Однако аргументация Хокинга дает представление о том, насколько трудно доказать это, казалось бы, очевидное утверждение. Трудность усугубляется еще и тем, что не существует достаточно корректного и надежного определения самого понятия «свободная воля».

Кадомцев определяет здесь свободу воли как свободу выбора, но не объясняет, что такое *свобода выбора*. (Выбор, являющийся следствием квантово-механической случайности – свободен?)

А вот еще одно известное определение: «Свобода воли – это способность самостоятельно определять свои действия». Непонятно только, что значит «самостоятельно». (Действия, предопределенные генетически или обусловленные внушением или случайностью – самостоятельны? Действия ребенка, копирующего взрослых, – самостоятельны?)

Вообще, такого рода явные словесные определения свободы воли – привлекательные на первый взгляд – сильно напоминают порочный круг.

Намного более надежным могло бы быть определение обсуждаемого понятия через устойчивый, повторяющийся контекст.

Поясню свою мысль на примере определения понятия «дуэль на пистолетах». Онегин и Ленский стреляются, Пушкин и Дантес стреляются, Лермонтов и Мартынов стреляются...

Это – дуэль на пистолетах.

***Парадокс заключается в том, что для «свободы воли» мы, вообще говоря, не располагаем подобным устойчивым, повторяющимся контекстом. Именно те действия, которые мы склонны приписывать нашей свободе воли, глубоко индивидуальны, их мотивы непроверяемы...***

И все же, в некоторой достаточно узкой области (а именно – в математике) такой контекст удается обнаружить.

Дело в том, что одно из вполне надежных мыслительных средств, которыми пользуются математики, прямо опирается на существование свободной воли.

Это средство – ОПЕРАТОР СВОБОДНОГО ВЫБОРА (не путать с аксиомой выбора [6]), действие которого определяется словами:

**«пусть  $x$  – произвольно взятый элемент множества  $X$ » (\*)**

(Вместо термина «произвольно взятый» употребляются также его синонимы: «некоторый произвольный», «любой», «какой-либо», «какой-нибудь».)

Приведем пример использования оператора (\*) при доказательстве одной из школьных теорем.

**Теорема.** *Площадь каждого треугольника равна половине произведения его основания на высоту. (Точнее: численное значение площади каждого треугольника равно половине произведения численного значения длины его основания на численное значение длины опущенной на это основание высоты.)*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольно взятый треугольник; обозначим его  $ABC$ . Далее, применяя общеизвестные построения и вычисления, докажем утверждение теоремы применительно к треугольнику  $ABC$ . Так как треугольник  $ABC$  был выбран произвольным образом, заключаем, что площадь *каждого* треугольника определяется по такой же формуле. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Покажем, что «произвольный выбор» заменить на «случайный выбор» в доказательстве нельзя. Действительно, попробуем провести доказательство так: пусть  $ABC$  – некоторый случайным образом выбранный треугольник. Проведя для треугольника  $ABC$  соответствующие построения и вычисления, докажем для этого треугольника требуемую формулу. Так как треугольник  $ABC$  был выбран нами случайно (а не произвольно), то ... закончить доказательство не удастся. Из того, что для некоторого случайно выбранного треугольника верна какая-то формула, еще не следует, что эта формула верна для всех треугольников.

Мы видим, что комбинация слов «произвольно взятый элемент» обладает замечательной способностью фокусировать нас на одном-единственном «идеальном» объекте так, что результат наших рассуждений оказывается приложим ко всем объектам сразу!

Приведем другой характерный пример применения оператора свободного выбора – на этот раз из математической физики. Рассуждение, взятое из книги Рихарда Куранта [7], приводится в сокращенном пересказе, с тем чтобы подчеркнуть применение оператора свободного выбора.

Итак, требуется установить, что некоторая функция  $U(Q)$ , заданная на внутренности шара, при стремлении точки  $Q$  к границе шара стремится к заданным граничным значениям. Доказательство ведется следующим образом. Пусть  $P$  – произвольная точка на границе шара,  $Q$  – произвольная точка внутри шара. Доказываем, опираясь на геометрические соображения, что  $U(Q)$  сколь угодно мало отличается от граничного значения в точке  $P$ , если  $Q$  достаточно близко к  $P$ . Затем Курант сразу заключает: «Это завершает доказательство», опуская, как чересчур очевидное, соображение «так как точка  $P$  на границе шара была выбрана произвольно».

**Замечание 2.** Слова «так как элемент  $x$  был выбран произвольным образом, то проведенное рассуждение справедливо для всех  $x$ » представляют собой, по сути, вторую часть оператора (\*) и должны завершать доказательство, начинающееся с применения оператора (\*). В неформализованных (т.е. не пользующихся

языком формальной логики) математических текстах это соображение, как правило, опускается. В разделе логики, именуемом *теория предикатов*, упомянутое логическое действие называется *правилом обобщения* (см., например, [8]).

Зададим теперь себе вопрос: чья же свободная воля имеется в виду в каком-либо математическом тексте, использующем оператор (\*)? Очевидно, что, поскольку математический текст призван убедить читателя в справедливости того или иного вывода, то имеется в виду именно свободная воля читателя. Иными словами, тысячи математиков, пишущих тексты, где явно или неявно используется оператор (\*), предполагают наличие свободной воли у всех, кому они адресуют свои труды. (См. в этой связи также раздел 6.)

Итак, понятие «свободная воля» – один из инструментов значительной части математики (в частности – математического анализа, теории дифференциальных и интегральных уравнений), а также математической физики. С помощью этого понятия получена масса результатов, допускающих физическую проверку и выдержавших ее. Если свободная воля – иллюзия, то как объяснить предсказательную силу этих математических работ?

[1] Fruit flies display free will. – New Scientist, 16.05.2007.

[2] Defending free will: A fruit fly makes choices. – Reuters, 16.05.2007.

[3] Крючков В. Несвобода воли. Парадокс. – Итоги, №24/626 (10.06.2008).

[4] Хокинг С. Кратчайшая история времени. – СПб.: Амфора, 2006, с.132.

[5] Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. – УФН, 1994, т.164, №5, с.522.

[6] Аксиома выбора утверждает: «Для каждого семейства  $S$  непустых непересекающихся множеств  $X$  существует (по меньшей мере одно) множество  $M$ , элементами которого являются элементы множеств  $X$ , выбранные по одному в каждом  $X$ . (Подчеркнем, что выбор, о котором здесь идет речь, без ущерба для смысла аксиомы можно считать случайным.)

[7] Курант Р. Уравнения математической физики. – М.: Мир, 1964, с.267–269.

## 2. СВОБОДНЫЙ ВЫБОР И ТЕСТ ТЬЮРИНГА

Еще одна идея заключается в том, что механизм (неживой) никогда не «поймет», что такое свободная воля и будет в лучшем случае подменять это понятие случайностью. На этом можно попытаться сыграть, чтобы отличить человека от андроида (проблема, впервые сформулированная Аланом Тьюрингом). В качестве **теста** предлагается задача:

*«Имеется последовательность из нулей и единиц. Первый член последовательности 1. Если для некоторого произвольно взятого номера  $n$  соответствующий член последовательности равен 1, то следующий за ним также равен единице. Верно ли, что вся последовательность состоит из единиц?»* Андроид (запрограммированный таким образом, что термин «произвольный» означает для него «случайный») говорит: *«Это утверждение, вообще говоря, неверно»*. (Еще он может сказать, что в каждом из множества миров в этой последовательности будет свое количество единиц.)

Человек говорит: *«Очевидно, верно»*.

**Вариант теста:** *«На числовой оси задана функция  $f$ . Для произвольно взятого  $x$  доказано, что  $f(x) = 1$ . Верно ли, что  $f(0) = 1$ ?»*

Андроид (который понимает «произвольный» как «случайный») говорит: *«Это утверждение, вообще говоря, неверно»*.

Человек говорит: *«Очевидно, верно»*.

**Замечание.** То, что андроид будет прочитывать термин «произвольный» как «случайный», вовсе не обязательно. Это зависит от вложенного в него алгоритма. Однако, такой способ запрограммировать андроида представляется мне наиболее естественным. Это, конечно, сужает область рассмотрения. Если посмотреть на проблему более широко, то можно предположить, что в результате саморазвития алгоритма обнаружится, что устройство реагирует на термин «произвольный» так же, как и люди. В этом случае

я бы предложил считать устройство живым и ответственным за свои поступки.

### 3. О ПОНЯТИИ «ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА»

Еще Диофант (III в.) при решении уравнений использовал буквы для обозначения неизвестных, однако развитая система буквенных обозначений для нужд алгебры сформировалась гораздо позднее – после работ Виета (конец XVI в.), применившего буквенную символику и для обозначения известных величин – коэффициентов рассматриваемых уравнений.

В дальнейшем, после работ Декарта, Ньютона, Лейбница в математику прочно вошло понятие *переменной*, которую также стали обозначать при помощи букв. В сущности, без понятия переменной величины (как и без понятия числа) в наше время математика немислима.

В современной математической логике понятие переменной фактически вытеснило понятие неизвестного. Например, уравнение

$$x + 3 = 5 \tag{1}$$

рассматривается как *одноместный предикат*, т.е. выражение, зависящее от переменной  $x$  и превращающееся в высказывание (ложное или истинное) при подстановке вместо  $x$  какого-либо числового значения этой переменной. Что касается решения уравнения (1), то оно рассматривается как элемент *множества истинности* соответствующего предиката (т.е. множества всех тех  $x$ , при которых предикат (1) превращается в истинное высказывание). В нашем случае, очевидно, упомянутое множество истинности состоит из единственного числа 2.

Такая точка зрения на уравнения позволяет избавиться от «лишнего» понятия *неизвестное* и унифицировать изложение материала, относящегося к теме «предикаты». Однако, математики, работающие не в сфере чистой логики, решая уравнения, обычно предпочитают иметь дело с *неизвестным*  $x$ , а не с *переменной*  $x$ .

С чисто математической точки зрения оба подхода эквивалентны, но с точки зрения педагога разница между ними существенна.

Дело в том, что понятие «неизвестное» гораздо проще, чем понятие «переменная» (на что обычно не обращают внимания). Недаром понятие «переменная» вошло в математический обиход спустя более тысячи лет после понятия «неизвестное»!

*Если  $x$  – неизвестное решение какого-то уравнения (о котором мы знаем, что у него имеется одно-единственное решение), то  $x$  – это имя индивидуального объекта.*

Если мы имеем дело с уравнением, у которого несколько решений, то и здесь можно временно сосредоточиться на каком-то одном из решений, по-прежнему считая, что  $x$  – это имя индивидуального объекта.

*Если же  $x$  – переменная, то:*

*$x$  – это не имя индивидуального объекта;*

*$x$  – это не имя совокупности объектов;*

*$x$  – это не имя какого-либо известного физического процесса.*

Если, допустим, переменная  $x$  – это точка, пробегающая единичную сферу, и мы спросим у двух разных математиков, где, по их мнению, расположена эта точка в данный момент времени и куда она движется, то мы получим, скорее всего, разные ответы.

Но тогда что же представляет собой переменная  $x$ ? На мой взгляд, ответ на этот вопрос таков:

*$x$  – это свободно выбираемый элемент из некоторого множества  $X$*

(в нашем примере  $X$  – это множество точек единичной сферы).

Таким образом, само понятие «переменная» не является, как мы видим, «первичным», а определяется через психический процесс – (беспрерывно возобновляемую) процедуру свободного выбора.

**Замечание.** Между “свободным выбором” и “выбором произвольного элемента” имеется тонкая разница в употреблении. Свободный выбор характеризует переменную, которую мы не собираемся фиксировать, в то время как произвольно выбранный элемент

обязательно фиксируется для дальнейшего рассмотрения. Оба эти понятия, однако, чрезвычайно близки друг другу.

Заметим, кстати, что и понятие *бесконечность* невозможно ввести, не опираясь на понятие свободы воли. (Действительно, чтобы объяснить, что такое «бесконечность», приходится рассматривать *произвольно большое* число элементов какого-нибудь множества, а затем обнаружить в этом множестве еще один не рассмотренный ранее элемент.)

Итак, *свободный выбор* обнаружился – хотя и в скрытом виде – среди базовых, неустранимых понятий современной математики (и, в частности, математической логики).

#### **4. СВОБОДА ВОЛИ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ**

Для преподавателя математики вопрос о наличии или отсутствии свободы воли вовсе не является второстепенным – например, на уроках геометрии невозможно обойтись без «*выбора произвольной точки*».

Любознательный ученик может тогда спросить:

– А что такое произвольная точка? Это то же самое, что случайно выбранная точка?

Ответ преподавателя будет, конечно, отрицательным. Заменив *произвольно* выбранную точку на точку, выбранную *случайно*, мы не сможем провести ни одного сколько-нибудь содержательного доказательства. Ведь случайно выбранная точка может совершенно случайно всегда оказываться, например, началом координат...

Но в то же время *некоторая произвольно выбранная точка* – это не то же самое, что *каждая точка*. Мы просто физически не можем выбрать каждую точку на плоскости – человек, как утверждают психологи, не способен одновременно уследить больше чем за семью объектами!

Похоже, однако, что представление о свободе воли является для человека врожденным, а сомнение в ее наличии есть некое «отклонение от нормы». К такому выводу нас подталкивают следующие обстоятельства.

Прочитую вначале учебник по высшей геометрии Н.В.Ефимова [1]: ***«...точки, прямые и плоскости как образы нашего геометрического воображения не поддаются математическому описанию».***

— Как же так? — может воскликнуть читатель, искушенный в математике. — А как же аксиомы Гильберта, Клейна, Евклида? Разве они не определяют, что такое точка, прямая и плоскость?

— Конечно, определяют, — ответим мы. — Но только в некоем абстрактном пространстве [2], а не в пространстве наших зрительных образов. То есть определяют, но не то, что нужно.

Но это, по-видимому, означает, что, опираясь на информацию, поступающую от органов чувств, придти к мысленному образу точки невозможно. Откуда же тогда взялся этот мысленный зрительный образ?

Прочитую в этой связи статью Александра Маркова («Элементы», 21.06.10):

***<<Ключевую роль в пространственном мышлении у млекопитающих играют три группы нейронов: «клетки места», «клетки направления» и «клетки координатной сетки». Две команды исследователей независимо друг от друга обнаружили, что у маленьких крысят, впервые в жизни отправившихся на прогулку, уже есть нормально работающие клетки первых двух типов, и только клетки третьего типа появляются немного позже. По-видимому, это означает, что восприятие пространства у млекопитающих в значительной мере является врожденным.>>***

Любопытно сравнить результаты этих опытов с методикой обучения младших школьников понятию «точка» (сообщено автору Н. Лукановой):

Если просто нарисовать на листе бумаги точку фломастером или ручкой, то у ребенка может создаться впечатление, что точка — это небольшая клякса, поэтому добавляют: *«Точка не имеет тол-*

щины, точка — это место». Замечательно, что дети легко понимают, что именно имеется в виду.

Приведу теперь еще одну цитату из вышеупомянутой статьи А. Маркова:

***<<...известно, что основные нейрологические механизмы пространственного восприятия у людей и крыс примерно одинаковы, поэтому результаты этих исследований почти наверняка приложимы к людям.>>***

Однако, если допустить, что представление о точке является для человека врожденным, то, похоже, приходится признать, что врожденным является и (неявное) представление о свободной воле. Действительно, в этом случае врожденным должно быть и представление об окружающем пространстве как о континууме, состоящем из точек. Но что значит добраться из точки А в точку В по пути АВ? Это значит, что какова бы ни была *произвольно взятая* точка на этом пути, в ней придется побывать...

Итак, «переменная» и «бесконечность» — понятия, непосредственно базирующиеся на (по-видимому, врожденном) понятии «свобода воли».

А как обстоят дела с обычным (количественным) натуральным числом — неужели и оно опирается на понятие «свобода воли»?

На взгляд автора, ответ на этот вопрос, как ни странно, положителен. Действительно, чтобы определить, например, (количественное) число «пять», нам нужно мысленно соединить тоненькими ниточками пальцы руки с рассматриваемым набором предметов, устанавливая таким способом взаимно-однозначное соответствие между пальцами и этими предметами. Но эта процедура, очевидно, опирается на представление о том, что ни одна мысленно проведенная нить не должна рваться и мы, путешествуя взглядом вдоль нее, должны побывать в *произвольно взятой точке* этой нити.

Итак, в сущности, **вся неформальная математика** базируется на врожденном представлении о свободе воли.

**Замечание.** Что касается математики формальной, то и в ней операция свободного выбора присутствует (в завуалированном виде). Действительно, когда математик, осуществляя формальный

вывод, пишет одну формулу за другой, он должен быть уверен, что в каждый (и тем самым *в произвольно взятый*) момент времени его формулы остаются теми же самыми – иначе его вывод теряет всякий смысл.

[1] Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978, с.205.

[2] Точнее было бы сказать: определяют с точностью до изоморфизма.

[3] Локшин А.А., Иванова Е.А. Откуда мы знаем, что такое точка? – М.: МАКС Пресс, 2011.

## 5. ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

*(логическая драма в двух действиях)*

### *Действие первое*

**Препо.** Юноши и девушки! Сегодня мы будем перекраивать одни фигуры в другие. Вот первая задача: *«Перекроить произвольный треугольник в прямоугольник, сделав наименьшее число прямолинейных разрезов»*.

**Студент.** Пожалуйста! Достаточно одного разреза!

**Препо.** Вы неправы, одного разреза недостаточно.

**Студент.** Почему это?

*(Выходит к доске, рисует равнобедренный треугольник, режет его пополам и составляет из двух половинок прямоугольник)*

Вот, смотрите, у меня получилось!

**Препо.** Ничего подобного. Я же сказал: «произвольный треугольник», а вы нарисовали вместо произвольного равнобедренный.

**Студент.** Ничего не понимаю. Произвольный – это какой? Такой, какой я захочу. Вот мой треугольник нарисован на доске.

**Препо.** Ну да, ну да... Я понимаю причину ваших затруднений... Давайте считать, что произвольный – это случайно выбранный треугольник.

**Студент.** Ну, если вы так хотите... Вот я случайно выбрал равнобедренный треугольник и нарисовал его...

**Препоd.** Вы как будто нарочно делаете вид, что не понимаете меня. Нарисуйте еще один *действительно произвольный* треугольник и докажите все для него!

**Студент.** Пожалуйста, это нетрудно...

*(рисует еще один равнобедренный треугольник)*

**Препоd.** Нет, это невозможно вынести! Вы не понимаете или делаете вид, что не понимаете простейших вещей. Ну, хорошо. Давайте переформулируем задачу. «*Дан произвольный треугольник. Требуется перекроить его в прямоугольник.*»

**Студент.** Простите, но это уже другая задача. К тому же она некорректно поставлена. Если треугольник произвольный, то он не может быть просто «дан». Кто-то же должен проявить свою волю, давая нам этот треугольник. А в условии задачи этот субъект никак не обозначен...

**Препоd.** Этот, как вы изволили выразиться, «субъект» – автор задачника, известный математик, профессор Иван Петрович Сидоров! Он всю свою жизнь отдал тому, чтобы...

**Студент.** Так он уже умер? Как же мы теперь узнаем, какой треугольник он имел в виду... Может быть, после него остались какие-нибудь записи?

**Препоd.** *(багровея)* Какие еще записи! Вот вам треугольник: *(рисует на доске вытянутый, неравнобедренный тупоугольный треугольник)*

Режьте его! На две части! И попробуйте составить из них прямоугольник!

**Студент.** Кажется, это невозможно... И я даже могу объяснить, почему. Все дело в том, что ваш треугольник – не произвольный...

**Препоd.** Что???

**Студент.** Только не обижайтесь, профессор. Но если бы вы позволили приставить к своей голове электроды, то – в соответствии с результатами недавних биологических опытов – обнаружилось бы, что образ вашего треугольника был сформирован в вашем подсознании еще до того, как вы об этом узнали. То есть ваш треугольник не является продуктом вашей свободной воли и тем самым не является произвольным. Увы...

**Препоd.** У-у-у ...

*(теряет сознание)*

**Студент.** (*в зал*) Бедный! Честное слово, не думал, что он всерьез воспринимает эту свою математику. Но мы-то с вами знаем, что она ни на чем не основана!

### *Действие второе*

**Препо.** (*встает, отряхиваясь*) Я не терял сознания, а просто за доску зацепился... Так что, продолжим дискуссию. Кстати, ваш последний аргумент сейчас будет обращен против вас. А именно, это *ваш* равнобедренный треугольник не является произвольным, так как его образ возник в вашем подсознании еще до того, как... И, значит, вы неправильно решили задачу!

**Студент.** Нет, профессор. Не я неправильно решил, а вы неправильно поставили задачу. Произвольный треугольник – это несуществующий объект. Ваша задача бессмысленна!

**Препо.** Ну вот, слава Богу, прозвучало это ключевое слово – «объект». Произвольный треугольник – это не объект!

**Студент.** О-го-го! А что же это?

**Препо.** Это процесс! В котором участвуют по крайней мере два человека, и чем больше участников, тем лучше! Вот вы задумываете свой треугольник, и рассказываете мне свое доказательство. А я стараюсь придумать такой треугольник, для которого ваше доказательство не пройдет. И если сделать это мне не удастся, то я готов признать, что ваше доказательство пригодно для произвольного треугольника!

**Студент.** Иными словами, вы придаете некоторый, хотя и весьма ограниченный, смысл вашей математике независимо от того, существует свобода воли или нет?

**Препо.** Именно так, именно так!

*Занавес*

## **6. НЕМНОГО ЛИНГВИСТИКИ: “ARBITRARY ELEMENT” и “FREE WILL”**

В англоязычной литературе в качестве эквивалента термину *произвольно выбранный элемент* используется термин *arbitrary element*, а для *свободной воли* - термин *free will*,

не имеющий общего корня со словом *arbitrary*. Поэтому англоязычному читателю может показаться странной идея автора, что *arbitrary element* и *free will* имеют друг к другу вообще какое-либо отношение.

Но может быть, действительно, речь идет об аберрации, основанной на случайном родстве терминов в русскоязычной литературе и произвольный выбор к свободной воле не имеет никакого отношения?

Попробуем разобраться в “механике” произвольного выбора, взглянув на нее с несколько иной точки зрения.

Фактически, произвольный выбор эквивалентен следующей процедуре. Мы выбираем любым способом – случайным образом, подчиняясь какому-нибудь внешнему закону или еще как-нибудь – элемент  $w$  из некоторого (вообще говоря, бесконечного) множества  $M$ , но при этом разрешаем себе пользоваться только теми свойствами элемента  $w$ , которые присущи *всем* остальным элементам множества  $M$ . Но как проверить, что мы не нарушили наложенного на себя ограничения? В случае бесконечного множества  $M$  это можно сделать одним-единственным способом: взять на этот раз уж точно *произвольный* элемент  $z$  из нашего множества и посмотреть, обладает ли он тем свойством, которым мы только что воспользовались, изучая элемент  $w$ .

В результате, желая определить “произвольный выбор” через что-то еще, мы вернулись к “произвольному выбору”.

Итак, выбор произвольного элемента – это мысленная операция, не сводимая ни к какой другой и не формализуемая, а тем самым – не доступная для интеллекта андроида.

Но следует ли отсюда, что “произвольный выбор” каким-то образом связан со “свободной волей”? Думаю, что в конце концов это вопрос определения – что именно мы хотим понимать под *свободной волей*. Если согласиться, что свободная воля присутствует при всяком интеллектуальном или каком-либо ином выборе, не доступном машине, то ответ на поставленный выше вопрос, очевидно, будет положителен.

## 7. ЧЕТЫРЕ ИСТОРИИ ПРО ЗВЕРЕЙ

Если следовать взглядам Хокинга, то свободный выбор, акт свободной воли – это поступок, *не predetermined генетически, не predetermined прошлым опытом и при этом не случайный*. Такие выборы – я уверен – время от времени совершает человек, но опознать свободный выбор среди множества поступков, совершаемых человеком, практически невозможно. Слишком уж велика роль обучения, воспитания, контактов с другими людьми. Какой бы значительный поступок человек ни совершил, всегда можно сказать: «Ну, это он начитался таких-то книжек, наслушался таких-то разговоров, и т.д.» Поэтому найти и опознать свободный выбор, как мне представляется, намного проще, наблюдая за высшими животными.

### *История первая*

Случилось это лет сорок тому назад, но помню так, как будто все произошло сегодня.

Было начало лета, и шел я по зеленому скверу вдоль тихой непроезжей улицы. Вдруг вижу – на дорожке, усыпанной гравием, сидит большой вороненок. Сверху, в панике, кричат и мечутся взрослые вороны – и сделать ничего не могут. А внизу по этой самой дорожке мамыши возят свои коляски, рядом выгуливаются и резвятся здоровенные собаки.

Знал ли я тогда, что птенца, выпавшего из гнезда, нельзя брать в руки, иначе его родители от него откажутся? Сейчас с уверенностью не могу сказать. Но в соседстве с громадными псами у вороненка, скакавшего по земле, положение было незавидное.

Короче, не раздумывая, я взял этого вороненка и посадил его на высокую ветку одной из рябин.

И тотчас взрослые вороны, вместо того, чтобы заняться своим птенцом, стали меня прогонять, отчаянно крича и кружась над моей головой. Однако вороны не пикировали на меня – хотя вполне могли это сделать.

Стараясь не бежать, я удалялся из вороньего царства с максимально возможной скоростью, а несколько ворон летели надо мной на высоте двух-трех метров, проклиная меня на своем языке.

И вот, наконец, воронья аллея, обрамленная с двух сторон высокими рябинами, закончилась, и я вышел на открытое пространство, где пикировать на меня сверху было значительно проще.

Тут-то и произошло то, чего я никак не мог ожидать. Воронь, летевшие надо мной, вместо того, чтобы напасть – порознь или все вместе – прямо в воздухе слепились в большой черный шар, который мягко упал на землю позади меня. Преследование прекратилось...

Потом, на досуге, я пытался понять, что же, собственно, произошло.

И тогда, и сейчас единственное объяснение случившемуся я вижу в том, что какая-то одна из ворон была на моей стороне и в конце концов удержала остальных от бессмысленной расправы надо мной.

### *История вторая*

Эту поразившую меня охотничью историю я прочел в книге Юрия Орлова, где он приводит рассказ своего дяди [1]:

*<< Смотрю, сидят на дороге двое [волк и раненая волчица – А.Л.]. Муж-волк, значит, сопровождает ее в госпиталь. Убью двоих! Да только он, как меня увидел, поднялся, за шиворот ее тянет, идем, мол, давай. Она поднялась, побежали, и опять я от них отстал. И так каждый раз. Только догоню, он ее за шиворот, и – айда. Ну а все-таки она раненая. Уж я замотался, а ей как? Догоняю опять, смотрю, он ее тянет, тянет, а она лежит без движения. Ага! Загнал. Целюсь скорей в его. Двух волков теперь-то, думаю, папаше представлю. И что ж ты скажешь? Не уходит! Стоит и на меня смотрит: бей, мол, я ее на тебя не могу оставить. Не оставишь, думаю, не надо. Дело твоё, и жизнь твоё – не моя. Целюсь, глядим в глаза друг другу. Что ж ты, говорю, не бежишь? Так – не охота, а расстрел. Неужто за нее жизнь отдашь? Да она ж уже не живая! И кто ты есть – зверь! Тут вдруг она вскочила; и опять они убежали.>>*

### *История третья*

Теперь я хочу рассказать историю, приключившуюся с моей кошкой Мурой. В этой невыдуманной истории речь пойдет о том,

что внутренний мир кошки ничуть не беднее внутреннего мира людей.

Несколько лет тому назад в наш дом, вместе с другими гостями, пришла Инна С. (имя изменено), человек глубоко убежденный в коренном отличии животных от людей, и у нас с ней завязался ожесточенный спор на тему: есть ли у животных душа?

Я утверждал, что высшие животные ничем не хуже человека, и все, что есть у человека – должно быть и у них. Страсти накалялись и подошли к той опасной черте, за которой заканчиваются вежливость и гостеприимство. В пылу спора я вскочил со стула и вышел из комнаты, хлопнув дверью.

И тут произошло самое интересное. Мура, *впервые в жизни видевшая Инну С.*, по-видимому, внимательно слушала весь этот разговор. Когда я вышел из комнаты, она вскочила на невысокую книжную полку, подошла по ней к креслу, в котором сидела Инна, и погладила ее лапой по голове. Мура пожалела незнакомую женщину! Все, кто находился в комнате, буквально остолбенели.



*Мура (1992–2007)*

#### *История четвертая*

В заключение хочу рассказать еще об одном необычном случае, произошедшем несколько лет тому назад. Мы с сыном стояли на берегу Балтийского моря и вдруг заметили дикую чайку, подплывшую прямо к нам. Мне показалось, что чайке была нужна от нас какая-то помощь. Я взял чайку на руки и обнаружил, что у нее одна нога поранена и опутана большим клубком водорослей. Отмотав водоросли, я выпустил чайку обратно в море...

То, что дикий зверь или птица иногда обращается к своему извечному врагу – человеку – за помощью, вообще говоря, не является новостью. Однако, если поразмыслить, каждый такой факт поразителен с точки зрения логики. Действительно:

1) кажется совершенно невероятным, что обращение чайки за помощью к человеку обусловлено генетикой;

2) представляется совершенно невероятным, что такое обращение за помощью обусловлено прошлым опытом или обучением;

3) такое обращение за помощью, очевидно, не является случайным.

Однако три отвергнутые выше возможности (генетическая обусловленность, прошлый опыт, случайность) исчерпывают те мотивы, которыми мог бы руководствоваться самовоспроизводящийся автомат, развившийся в результате дарвиновского отбора. Иными словами, вышеприведенное рассуждение логически строго (почти математически) доказывает то, что всем «и так известно»: чайка – живое существо, а не робот. Три предыдущие истории говорят, в сущности, о чем-то подобном.

\* \* \*

И все же, конечно, хотелось бы привести пример проявления свободного выбора, сделанного человеком, а не зверем. Приводить этот пример неприятно, но он слишком доказателен, чтобы его можно было игнорировать. Читатель, вероятно, уже догадался, что речь идет о самоубийстве при ограничении свободы. (Общеизвестно, что у заключенных отбирают даже шнурки от ботинок.) Трудно себе представить, чтобы дарвиновский отбор мог каким-то образом способствовать распространению генов, отвечающих за *этот* выбор [2].

В заключение этого параграфа приведу еще один впечатляющий пример, взятый из книги Леонарда Млодинова [3]:

*<<Много лет назад в Йельском университете Лангер [Ellen Langer] и ее коллега [Judith Rodin] изучали то, как чувство контроля влияет на пациентов в доме престарелых. Одной группе сказали, что они сами могут решить, как обустроить свои ком-*

наты, и выбрать растение, за которым будут ухаживать. У другой группы комнаты были уже обставлены, а растение выбрано. <...> Прошло полтора года, и ученые были потрясены: в той группе, которой не дали возможности контролировать, смертность была 30%, а во второй, получившей контроль, - всего 15%.>>

На мой взгляд, “потребность в чувстве контроля” – это другое название для потребности в свободе выбора.

[1] Орлов Ю. Ф. Опасные мысли. – М.: Захаров, 2008, с.17–18.

[2] Приведу для сравнения прогноз, сделанный Дарвином в его «Происхождении видов»: «В будущем <... > психология будет прочно основана на необходимости приобретения **каждого** [выделено мной – А.Л.] умственного качества и способности постепенным путем». Цит. по : Марков А. Эволюция человека, т.2. – М.: Астрель, 2011, с.13.

[3] Млодинов Л. Несовершенная случайность. – М., 2011, с.268.

[4] Павлов И.П. Рефлекс свободы. – М.: Книговек, 2011.

[5] Пенроуз Р. Тени разума, т.2 – М., 2005, с.291-293.

## 8. ЧТО ЯВЛЯЕТСЯ МАРКЕРОМ ДЛЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО «Я»?

Итак, из сделанных *макроскопических* наблюдений со значительной долей вероятности следует, что «свободная воля» существует и представляет собой некий загадочный фактор, ничем не детерминированный и при этом не случайный (и тем самым не описываемый ни классической, ни квантовой физикой).

Странность упомянутого фактора во многом аналогична странному вопросу о том, каким образом может быть прикреплено «Я» к человеческому телу.

Здесь я должен дать некоторые разъяснения. Мне могут сказать:

– В чем, собственно говоря, проблема? Человеческое «Я» неотделимо от соответствующего тела, вот и все.

Так-то оно так, но непонятно, что «прикрепляет» непрерывное ощущение человеком собственного «Я» к его телу. Или, иначе:

что является уникальной характеристикой тела (маркером), при помощи которого «Я» может опознать свое тело.

Прежде всего, такую роль не могут играть элементарные частицы, из которых состоит мозг – просто потому, что, как утверждает квантовая механика, все элементарные частицы одного сорта принципиально неразличимы (тождественны). (На это соображение указал в свое время Р. Пенроуз [1].) Нельзя сказать: «Вот эти электроны – мои, они входят в состав моего тела, а все остальные – не мои!» На элементарных частицах невозможно поставить метку – не только материальную, но даже мысленную. (Если бы это было не так, то спектры атомов и молекул были бы иными.)

Тогда, может быть, таким маркером для «Я» является структура мозга? Однако структура мозга не может быть маркером для «Я» по следующей причине. Всегда можно мысленно представить себе две одинаковые структуры, расположенные в разных местах – они должны будут соответствовать одному и тому же «Я», что, очевидно, невозможно.

Итак, выходит, что «Я» просто нечем связать с человеческим телом? Но «Я», конечно, с телом связано – общей траекторией в мировом пространстве. Более того, похоже, что единственной существенной для «Я» характеристикой *его* тела оказывается место, занимаемое этим телом в пространстве в данный момент времени. И это, конечно, очень странно.

Объявить «Я» иллюзией тоже невозможно: *чья* это была бы иллюзия?

*Очевидно при этом, что «Я» неразрывно связано со свободной волей.* Поэтому странность, на которую мы натолкнулись в поисках подходящего маркера для «Я», не должна нас особенно удивлять.

[1] Пенроуз Р. Новый ум короля. – М.: УРСС, 2003, с.36.

[2] Кандель Э. В поисках памяти. – М.: Corpus, 2011.

[3] Марков А. Эволюция человека, т.2. – М.: Астрель, 2011.

## 9. МОЖНО ЛИ ОБОЙТИСЬ БЕЗ СВОБОДНОГО ВЫБОРА В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ?

Фундаментальное различие между *случайным выбором* и *произвольным выбором* является достаточно тонким, однако, оно очевидно для математиков, для которых «выбор произвольного элемента» является необходимым рабочим инструментом. Для физиков и естествоиспытателей это различие может показаться несущественным. Дело здесь в следующем. Устанавливая какой-либо закон природы (например, закон Гука), естествоиспытатель может выбирать экспериментальный образец из кучи аналогичных образцов, не руководствуясь «свободной волей», а просто подбрасывая монету. От этого ценность полученных результатов не уменьшится. Однако, выведенный индуктивным (а не дедуктивным!) путем из серии экспериментов закон Гука и не претендует на то, чтобы быть «вечной истиной». Если в очередном эксперименте закон Гука не будет выполняться, логика, на которой базируются физические исследования, не рухнет. Закон будет подправлен, вот и все.

Что касается математических теорем, то они именно претендуют на то, чтобы быть «вечными истинами», и проверка теорем на случайно выбранных примерах для этого недостаточна.

И все же, различие между случайным и произвольным выбором в конечном счете существенно и для естествоиспытателя — ведь математика, которой он пользуется, чрезвычайно чувствительна к этому различию.

Таким образом, физик или естествоиспытатель, пользующийся математикой для проверки на компьютере своих гипотез, поступит *нелогично*, если примется отрицать свободу воли. См. в этой связи [1], где Хокинг пишет буквально следующее:

*<<It is hard to imagine how free will can operate if our behavior is determined by physical law, so it seems that we are no more than biological machines and that free will is just an illusion.>> (“Трудно себе представить, как могла бы функционировать свобода воли в ситуации, когда наше поведение детерминировано физическими законами. Поэтому мы, по-видимому, являемся всего лишь биоло-*

*гическими машинами, а свободная воля — это всего лишь иллюзия”.)*

[1] Hawking S., Mlodinow L. The Grand Design. — New York, 2010.

## **10. МУЗЫКА КАК СВЕРХСТРУКТУРА**

*(Знание-Сила, 2009, №11)*

Вот вопросы, которые естественным образом возникают у математика после того как он прослушал какую-нибудь симфонию:

Можно ли по небольшому музыкальному отрывку восстановить все сочинение целиком?

Лежит ли в основе «удачного» музыкального произведения какой-нибудь алгоритм?

Если ответ на второй вопрос положителен, то это, в сущности, означает конец европейской музыки как искусства, поскольку генерировать алгоритмы пристало скорее машинам, а не людям...

Похоже, однако, что музыкальное сочинение есть нечто большее, чем совокупность нотных знаков, записанных в партитуре. Общеизвестен пример с Шестой симфонией Чайковского, которую многие знаменитые дирижеры, точно следуя партитуре, превращали в довольно заурядное доброкачественное сочинение. (Об этом, если не ошибаюсь, говорил в свое время Артем Варгафтик.)

Поэтому алгоритмический взгляд на природу музыки, скорее всего, несостоятелен.

Но можно ли в таком случае хоть с какой-то степенью объективности судить о качестве музыкального сочинения?

Если речь идет о классике, «проверенной временем», то можно по крайней мере надеяться, что сработал какой-то механизм естественного отбора. И если я, допустим, равнодушен к Моцарту, то проблема во мне, а не в Моцарте.

Но классика как раз и не вызывает ожесточенных споров. Другое дело – современные авторы. Современный Бах – это кто: тот, кто пишет самые алгоритмически сложные партитуры, или кто-то еще?

Ниже я предложу свой вариант ответа на этот вопрос. Мой ответ будет основан на некоем субъективном музыкальном переживании длительностью в 30 лет.

Но прежде я хочу сделать небольшое отступление о том, как можно учить иностранные языки без словаря и без учебника (а также без помощи учителя). Допустим, что вы знаете французский язык, а хотите выучить итальянский. Вы отправляетесь на необитаемый остров, захватив с собой кипу итальянских газет. Вначале, пытаясь прочесть какую-нибудь заметку, вы не понимаете почти ничего. Через месяц – вы понимаете почти все. Следует подчеркнуть, однако, что понимание нарастает *постепенно*.

Как такое могло произойти? Вы *постепенно* разгадали значения слов. При этом решающую роль сыграли два обстоятельства.

Первое. Вы все-таки знали французский. Поэтому вам с самого начала было, на что опереться в ваших попытках прочесть текст.

Второе. Газетный (да и любой другой) текст – это не просто последовательность слов, подчиненная каким-то элементарным структурным правилам (два одинаковых слова не могут встречаться подряд, предложение не может содержать больше ста слов и т.п.). Текст имеет еще определенный смысл, и обладает тем самым некоей *сверхструктурой*. На пересечении догадок о значении отдельных слов и смыслов содержащих их фраз вы и находили единственно возможное истолкование текста.

Еще интереснее (и загадочнее) природа восприятия художественного текста. Юрий Арабов писал когда-то о том, что в подлинной поэзии (в отличие от версификации) обязательно содержится *тайное послание*, не сводящееся к тому смыслу, который дал бы прозаический пересказ стиха. И это тайное послание является, таким образом, сверхструктурой по отношению к прозаическому смыслу стиха.

Важное отличие умения воспринять поэзию от способности к иностранным языкам в том, что не существует (и, я думаю, не может существовать) учебников и словарей, штудирова которые можно было бы научиться понимать стихи. А также в том, что восприятие стиха субъективно ощущается как *мгновенное озарение*, а не как постепенный, длительный процесс.

Здесь имеется несомненная аналогия с описанными Анри Пуанкаре в его знаменитом докладе «Математическое творчество» переживаниями математика, который *внезапно* (после длительной подсознательной работы) обнаруживает, что решил свою задачу.

*«То, что вас удивит прежде всего, это видимость внутреннего озарения, являющаяся результатом длительной неосознанной работы; роль этой бессознательной работы в математическом изобретении кажется мне несомненной <...>».*

*<...> среди бессознательных идей привилегированными, т.е. способными стать сознательными, являются те, которые прямо или косвенно наиболее глубоко воздействуют на наши чувства.*

*Может вызвать удивление обращение к чувствам, когда речь идет о математических доказательствах, которые, казалось бы, связаны только с умом. Но это означало бы, что мы забываем о чувстве математической красоты, чувстве гармонии чисел и форм, геометрической выразительности. Это настоящее эстетическое чувство, знакомое всем настоящим математикам. Воистину, здесь налицо чувство!» [1]*

Теперь расскажу об одном своем музыкальном переживании. В течение тридцати лет я не раз слушал сочинение одного из современных авторов. Сочинение казалось мне однообразным и скучным. И вот спустя 30 лет я вдруг ощутил, что эта музыка мне невероятно нравится!

Как это можно объяснить? Думаю, что дело здесь в том, что непонятную (написанную на не вполне традиционном языке) музыку мозг воспринимает как задачу. И начинает над ней работать, отыскивая сверхструктуру – тайное послание [2]. Если я прав, то распознать сочинения, которым, возможно, суждена долгая жизнь, не так уж трудно. Это сочинения, о которых высоко отзываются *одиночки* – люди, не связанные друг с другом принадлежностью к

общему кругу и высказывающие взгляды, которые противоречат общепринятым. Возможно, что они разгадали тайное послание раньше других.

\* \* \*

Эти заметки посвящены всего лишь моему личному опыту восприятия музыки и попыткам анализа этого опыта – в духе того анализа, которым пользуются даже не математики, а физики, обнаруживающие какое-то новое неожиданное явление.

Я вспоминаю свой разговор с одним очень умным собеседником, человеком, далеким от музыки. Я сказал ему, что песни Малера и Шуберта – исполненные на немецком языке (которого я совершенно не знаю) – производили на меня большее впечатление, пока я не знал смысла слов, и что вообще понимание слов только мешает восприятию вокальной музыки. Надо сказать, что мой собеседник посмотрел на меня как на сумасшедшего.

Добавлю, что упомянутый эффект – понимание смысла слов, как помеха – устойчив и, похоже, сталкиваюсь с ним не только я.

Можно ли это как-то рационально объяснить?

Представим себе инопланетянина, впервые попавшего на Землю и вынужденного слушать какое-нибудь стихотворение... Первое, что он заметит – это, что перед ним упорядоченная периодическая структура (рифмы, ритм). Второе, что он поймет, – это прозаический смысл стихотворения. И только в третью очередь он, возможно, догадается, что первые две структуры вовлечены в сложную игру, цель которой – доставить ему тайное послание, которое иным способом невозможно передать.

Он обнаружит, таким образом, что смыслы отдельных слов и оборотов речи – часть того алфавита, которым пишется тайное послание. И он поймет, что смыслы и их оттенки как часть поэтического алфавита играют не меньшую, а возможно, большую роль, чем звучания слов. ( К этому умозаключению он придет, заметив, что животные не понимают стихов.)

Нечто подобное он уяснит для себя, рассматривая картины знаменитых художников.

Затем его попросят прослушать какие-нибудь инструментальные сочинения и высказаться. Вот, что он, по моему мнению, мог бы сказать:

*«Алфавит прослушанных мною произведений является чисто акустическим, никакие смыслы не являются элементами этого алфавита. Это делает упомянутые произведения, в принципе, доступными для животных и растений и, соответственно, дает музыке преимущество перед иными видами искусств».*

Наконец, нашего инопланетянина попросят послушать несколько вокальных сочинений Баха, Малера, Брамса, Шуберта. Вот его скромное мнение:

*«Для прослушанных мною сочинений – в полном соответствии с принципом дополнительности Бора – точное понимание смысла слов не облегчает, а затрудняет восприятие музыки. Следовательно, упомянутые смыслы не входят в алфавиты тайных посланий этих сочинений. Любовь животных и растений к этой музыке является лучшим доказательством моей правоты. Но это не значит, конечно, что певцы могут петь, не понимая смысла произносимых ими слов».*

P.S. Первоначальный вариант этой статьи был уже закончен, когда я неожиданно узнал от Ильи Рублева, что у меня есть могучий союзник – Арнольд Шенберг, который в своей статье «Отношение к тексту» писал буквально следующее:

*«Несколько лет назад я был глубоко пристыжен, открыв, что не имею ни малейшего понятия о том, какие стихи положены в основу некоторых хорошо мне известных песен Шуберта. Прочитав же эти стихи, я выяснил для себя, что ничего не приобрел для понимания песен и ни в малейшей степени не должен был менять мое представление об их музыке. Напротив, обнаружилось: не зная стихов, я возможно постиг глубже ее содержание, подлинное содержание, чем храня верность собственно поверхностному словесному выражению мысли».*

[1] Пуанкаре А. Математическое творчество / В кн.: Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: МЦНМО, 2001, с.116-118.

[2] См. в этой связи также: Каретников Н.Н. Тема с вариациями. – М.: Киноцентр, 1990.

## 11. ЧТО ТАКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

Эта заметка – о том, что значит «доказать» вне пределов математики.

Один заслуженный адвокат дал такое объяснение понятию доказательства:

– Доказать – это значит убедить!

Это определение доказательства, является, очевидно, эффективной тавтологией. («Доказать» – это значит «убедить». А «убедить» – это значит «доказать».)

А вот что писал о доказательстве известный логик В.А.Успенский в 1967 году в своем предисловии к книге «Математика в современном мире» [1]:

*<<Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) – это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы с его помощью убеждать других.>>*

В дальнейшем эта формулировка была им усилена [2]:

*<< ...понятие доказательства не принадлежит математике (математике принадлежит лишь его формальная модель – формальное доказательство). Оно принадлежит логике, лингвистике и больше всего – психологии.*

*Итак, термин «доказательство» – один из самых важных в математике – не имеет точного определения. А приблизительное его определение таково: доказательство – это убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы можем убеждать других.>>*

(См. в этой связи также книгу Пенроуза [3], где говорится о передаваемости рассуждений, устанавливающих математическую истину.)

Если бы мир состоял из идеальных индивидуумов, не способных на обман и не подверженных внушению (т.е. был бы чем-

то вроде математического сообщества), «приблизительное определение» из [2], возможно, работало бы безупречно...

В реальном мире, однако, свойством *передаваемости* обладают самые дурацкие слухи, клевета и пропаганда, и никакого прогресса в уровне критичности у публики не наблюдается. Прочитав в этой связи великолепное наблюдение Юлия Марголина, сделанное им в лагере [4]:

*<<Нет такого лозунга, нет такой нелепицы и лжи, которых нельзя было бы путем тысячекратных и многолетних повторений навязать сознанию человека. <...> Не надо убеждать, достаточно повторять.>>*

И это тупое повторение тоже приходится считать доказательством?

Но продолжу прерванную цитату из книги В.А. Успенского [2]:

*<<...само представление о доказательстве неразрывно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человека. И то и другое меняется с ходом истории. Меняется языковое оформление доказательств. Меняется и представление об убедительности.>>*

Однако, на мой взгляд, за представлением о доказательстве должно стоять что-то более глубокое – некий рациональный принцип, устойчивый относительно изменений в психологии и языке, происходящих с течением времени. И этот рациональный принцип, на мой взгляд, следует – по крайней мере отчасти – заимствовать у естественных наук, а не у математики.

\* \* \*

Мне могут сказать: «Зачем искать новый принцип – что может быть устойчивее логики Аристотеля? Чем она вам не угодила?»

Но проблема заключается в том, что никакая логика не может обойтись без веры. Например, веры в то, что:

- 1) собеседник – живой человек, а не заводная кукла;
- 2) сценка, увиденная неделю тому назад, не была подстроена;
- 3) все существенные обстоятельства уже приняты во внимание;

4) собственные впечатления от происходящего адекватны, и т.д.

И вот, формальный логик, выбрав из приведенного списка то, что он принимает без доказательства, проводит свои безукоризненные построения.

Понятно, что основания, на которых покоятся эти формальные построения, не абсолютны. Собеседник может оказаться хорошо подготовленной заводной куклой, и т.д.

Поэтому *сама по себе формальная логика не годится на роль общего рационального принципа*, к которому явно или неявно тяготеет каждое доказательство.

Но существует ли вообще такой принцип?

\* \* \*

Рассмотрим пример. Будем исходить из того, что лжец – это человек, уличенный хотя бы один раз в крупномасштабном обмане. Такому человеку верить невозможно. Все его утверждения следует игнорировать. И вот, допустим, некто N на пятой странице своего сочинения уверяет нас: *«я очень люблю Достоевского»*, а на десятой – *«как я уже говорил, я очень не люблю Достоевского»*. Формальный логик скажет нам:

– *В тексте противоречие. N – лжец. Все, что он пишет, следует игнорировать.*

Но логик не замечает простейшего объяснения, выпадающего из его стройной системы. Вот, что мы можем ему ответить:

– *В тексте не ложь, а описка. И то чрезвычайно важное Утверждение, которое приводит N на 20-й странице, ни в коем случае нельзя игнорировать!*

Однако, обсуждаемый текст – это письмо, отправленное из тюрьмы. Поэтому естественно предположить, что:

– *Мы имеем дело не с опиской, а с условным знаком. N дает понять, что его Утверждение на 20-й странице ложно!*

Но и на это нетрудно возразить:

– *Нет, Утверждение истинно. Письмо рассчитано на умного цензора, который подумает, что в письме не описка, а услов-*

*ный знак и что N дает понять, что его Утверждение нужно понимать с точностью до наоборот.*

И так далее. Кажется, что цепочку доводов и контрдоводов можно продолжать бесконечно. Есть ли отсюда какой-то выход?

\* \* \*

Заметим, что возникающая с некоторого момента дурная бесконечность доводов и контрдоводов (напоминающая бесконечную систему отражений одного зеркала в другом) не обязательно исчерпывает все наши возможности. Обратим внимание на то, что, предполагая цензора все более и более хитрым, мы перестаем расширять контекст, в который погружено Утверждение, а последовательно выдвигаем новые гипотезы, причем гипотезы «через одну» фактически неотличимы друг от друга. Иными словами, мы «зациклились».

Выход из тупика может найтись, если удастся именно расширять контекст, в который погружено испытываемое на истинность Утверждение. Существенно, что *такое расширение не должно происходить по навязанному кем-то плану*. Поясню, что имеется в виду. Пусть Утверждение (содержащееся в письме) состоит в следующем:

<< КАМЕННЫЙ ВЕК НАСТУПИЛ ПОСЛЕ БРОНЗОВОГО>>.

Предложим теперь Проверяющему провести где-нибудь раскопки. Место для раскопок он выбирает по собственному произволу [5]. Потом проводит раскопки в других произвольно выбранных местах, и везде результат один и тот же: культурный слой каменного века оказывается под культурным слоем бронзового века. Значит, заключаем мы, Утверждение ложно.

Проверяющий, конечно, может возразить:

– *Это все сфальсифицировано. На самом деле Утверждение истинно...*

Тут-то мы и подошли к обрыву цепочки доводов и контрдоводов:

– *Места для раскопок выбирались Вами (Проверяющим) по Вашему собственному произволу. Поэтому у Вас не может быть*

*сомнения в том, что на всем гигантском поле культурный слой каменного века старше слоя бронзового века. Но все гигантское поле не может быть фальсифицированным, так как ресурсов для такой масштабной фальсификации у заинтересованных лиц не могло быть.*

Рассмотренное выше Утверждение – модельное, а проведенное после него рассуждение – **модель не-математического доказательства.**

\* \* \*

В заключение приведу пример модельного Утверждения-2, более приближенного к реальной жизни:

<<РАБОЧИЕ И КРЕСТЬЯНЕ ЖДУТ АЛЕКСЕЯ МАКСИМОВИЧА В СССР>>

Как известно, Горький в эмиграции получал массу писем, изготовленных в ходе начатой ЦК кампании и содержащих читательские восторги и призывы вернуться в СССР. Каждое новое такое письмо убеждало его все больше в справедливости Утверждения-2. Но это не было проверкой Утверждения-2! Горькому нужно было бы каким-то образом узнавать, что действительно думают по данному поводу произвольно выбранные (самим Горьким) жители Советского Союза. Однако реализовать такую проверку было, конечно, невозможно. (В аналогичную ловушку Горький попал во время своей поездки на Беломорканал.)

Описанный выше прием свободного расширения контекста применим, таким образом, не всегда (никакого сохранившегося контекста у проверяемого утверждения может попросту не быть). Но именно этот прием придает процессу доказывания при установлении не-математических истин естественно-научный смысл.

[1] Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967, с.8.

[2] Успенский В.А. Апология математики. – М.: Амфора, 2009, с.441.

[3] Пенроуз Р. Новый ум короля. – М.: УРСС, 2003, с.337.

[4] Юлий Марголин, Путешествие в страну зе-ка. – М.: АСТ, 2008, с.274.

[5] Вариант: места для раскопок выбираются *случайно*. Для нематематического доказательства различие между произвольным и случайным выбором обычно не существенно, хотя иногда пренебрежение этим тонким различием приводит к роковым ошибкам. Все дело в том, что подстроить «случайность» не так уж и сложно. См. в этой связи, например: Сарнов Б. Империя зла: судьбы писателей. – М.: Новая газета, 2011, с.108.

